MAI 2 - domácí úkol ze cvičení 10 (základní pojmy u funkcí více proměnných)

1. Pokuste se rozhodnout, zda následující funkce jsou spojité v R^2:

   a) $f(x,y) = (x+y)^2 . \cos(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$ pro $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$;

   b) $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ pro $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

2. „Mechanické“ derivování.
   Vypočítejte parciální derivace 1. a 2.řádu všude, kde existují, funkcí:

   a) $f(x,y) = \exp(x^2 - y - \frac{x}{y})$; b) $f(x,y,z) = \sqrt{z - x^2 - y^2}$; c) $f(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}}$;

   Zjistěte, kde jsou dané funkce diferencovatelné a určete v těchto bodech jejich diferenciál.

3. Základní „slovíčka“:
   Je dána funkce f a bod (x_0, y_0) (a vyberte si) :

   i) $f(x,y) = 4\sqrt{1 - \frac{y}{x+1}}$, $(x_0, y_0) = (0,-3)$

   ii) $f(x,y) = \arcsin\left(x^2 - y\right)$, $(x_0, y_0) = (1,1)$

   a) Najděte a načrtněte její definiční obor, vyšetřete spojitost funkce f v definičním oboru .
   b) Vypočítejte $\nabla f(x_0, y_0)$.
   c) Ukažte, že funkce f je diferencovatelná v bodě (x_0, y_0) a určete v tomto bodě totální diferenciál funkce f.
   d) Napište lineární aproximaci funkce $f(x,y)$ v okolí bodu (x_0, y_0).
   e) Napište rovnici tečné roviny a normály ke grafu f v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.
   f) Nabývá funkce f globálních extrémů ve svém definičním oboru nebo lokálních extrémů uvnitř ?

A můžete zkusit i trošku „hezčí“ příklad:

4. Je dána funkce f : $f(x,y) = xy$ pro $|x| \geq |y|$, $f(x,y) = 0$ pro $|x| < |y|$.
   a) Vyšetřete spojitost funkce f v R^2;
   b) Vypočítejte $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$;
   c) Vyšetřete, zda je funkce f v bodě $(0,0)$ diferencovatelná.
   d) Ukažte, že $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.